

Einleitung

„Ein ganz normaler Tag, oder?“

Ich schaue in meinem Auto sitzend durch die Windschutzscheibe in den Sternenhimmel. Es ist Nacht. Ich bin gerade auf dem Weg zum Arbeiten und blicke in der Nähe vom Flughafen nach Flugzeugen suchend sehnsüchtig in den Himmel. Ich träume: „Wäre ich doch jetzt bloß Tauchen oder Segeln weit weg vom kalten Deutschland!“ Da ertönt die Stimme meines Navigationssystems und erinnert mich an der nächsten Möglichkeit abzubiegen.

Schmunzelnd denke ich: „Beruhigend, dass die Mathematik immer mit mir reist!“. Weißt du was ich meine?! Egal, ob du es weißt oder nicht:

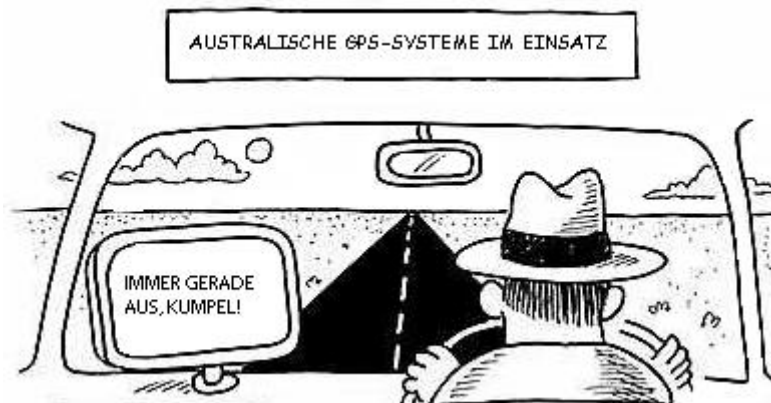
Lass' dich mitnehmen auf die Reise in eine Realität voller Mathematik!

Ob in meinem Auto auf der Autobahn, am Himmel als Satellit oder Flugzeug auf dem Weg in den Urlaub, in meiner Freizeit als Segler, Taucher oder Mountainbiker:

Der Weg ist das Ziel.

So ist das Global Positioning System (kurz: GPS) aus dem heutigen Leben nicht mehr wegzudenken. Es wird ernst – „echte“ Probleme warten da draußen auf dich, wenn du dich fortbewegst! So hoffe ich, dass du gemeinsam mit mir im Laufe dieser Arbeit den Sinn für das ewige Mathe-Lernen entdeckst und so erkennst, dass die Mathematik uns täglich über den Weg läuft und bei Problemen unterstützt.

Also lass uns gemeinsam auf dem Weg loslaufen!



Orientieren leicht gemacht – Navigieren für Anfänger

Mit Koordinaten oder Navigation kommt nahezu jeder irgendwann mal in Berührung. Vielleicht ist es dir nur nicht aufgefallen: Du findest sie in Stadtplänen, beim Schach- oder „Schiffe-Versenken“-Spiel, bei Angabe von Schiffspositionen oder bei vielen anderen Gelegenheiten.



Die *Navigation* ist die Kunst des Steuermanns egal ob zu Lande, zu Wasser oder in der Luft. Das Wort stammt ab vom lateinischen Verb *navigare*, das das Führen eines Schiffes darstellt. Der Navigator oder Steuermann muss also während seiner Navigation stets die geografische Position durch verschiedene Methoden bestimmen, den besten Weg von Start zu dem angestrebten Ziel ansteuern und somit den optimalen Kurs fahren.

So ist es nicht verwunderlich, dass auch die neuesten Errungenschaften der Technik und des Alltags – wie das Navigationssystem GPS – mit den gleichen Grundbegriffen arbeiten, die schon alte Seefahrer verwendeten. Durch diese Anwendung aller verschiedenen Methoden erreichten auch Seefahrer wie Columbus oder Magellan ferne Ziele in anderen Teilen der Welt. Ihre Mittel waren sicherlich einfach, dennoch sehr erfolgreich, sonst wäre die Neue Welt (Amerika) nicht so früh entdeckt worden!

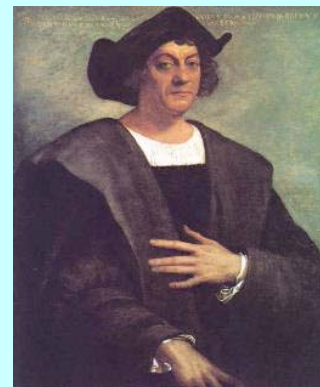
Wir wollen uns ein paar Episoden aus der frühen Navigation etwas genauer anschauen um auf der einen Seite zu erkennen welchen Luxus und welche simple Bedienbarkeit wir durch die neue Technik im Vergleich zu alten Seefahrern genießen und andererseits um uns durch einfache Mittel der Navigation langsam der komplizierteren Technik der Navigation mit dem GPS nähern.

Welche Tricks kannte Columbus, damit er diese lange Strecke mit seinen Männern mit dem Schiff zurücklegen konnte?



Zwar erkundeten nach heutigem Wissenstand die Wikinger bereits vor Columbus Amerika, dennoch gilt *Columbus* als erster Entdecker der Neuen Welt. Dies liegt wohl daran, da erst zu dieser Zeit die Kolonisierung Amerikas begann und die fragwürdige, erzwungene Besiedlung durch Europäer entgegen dem Willen der indianischen Urbevölkerung folgte.

Im Sinn über den westlichen Seeweg Europa und Ostasien zu verbinden, erreichte er am 12. Oktober 1492 die Amerika vorgelagerte Karibik.



Doch egal, ob er Indien oder einen Neuen Kontinent entdeckt hatte, bleibt die Frage, wie er ohne Land zu sehen sein Schiff navigiert hatte!

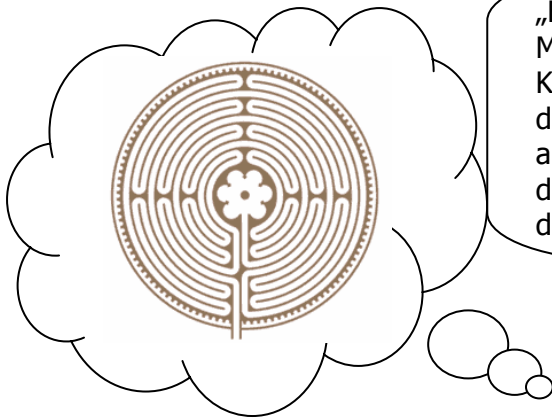
Einfachste Probleme können zum Scheitern einer solchen Expedition führen, viele Fragen gilt es im Vorfeld zu klären:



„Wie viel Liter Wasser verbraucht wohl meine Crew?“

„Wie lange dauert meine Reise eigentlich?“

So hat Columbus verschiedenste Überlegungen anstellen müssen: Auch mit seinem Bruder Bartolome hat er sicherlich geredet, da sein Bruder Kartograf war. Sie unterhalten sich über verschiedenste Zusammenhänge, dabei erzählt Bartolome folgendes:



„Bereits im Mittelalter waren Labyrinth sehr beliebt. Mir kommt gerade das schöne Labyrinth aus der Kathedrale von Chartres aus dem 13. Jahrhundert in den Sinn: Es wurde genutzt um religiöse Bräuche abzuwickeln. Es gibt keine Möglichkeit abzubiegen, dein Weg endet im Mittelpunkt. Es ist wie eine Reise in den Mittelpunkt deiner Seele!“



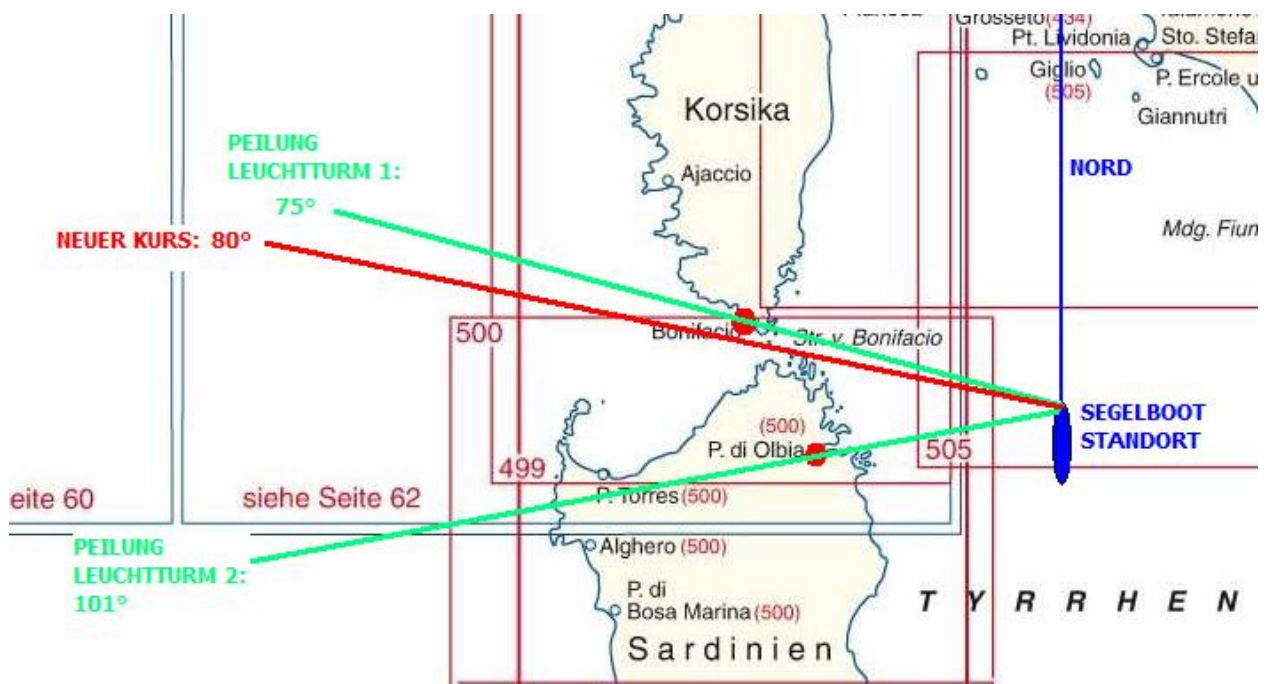
„Nun sieh dir meine Karte von unserer Stadt Lissabon an. Das nenne ich auch mal ein Labyrinth! So leicht ist alleine der Weg vom *Cais do Sodre* zum *Marques de Pombal* nicht zu finden, den du immer wieder vergisst! Geschweige denn der Weg von Europa nach Ostindien!“



1. Zeige Columbus den Weg zum *Marques de Pombal* ! Notiere ihm eine Wegbeschreibung!
2. Kannst du mir sagen wie lange er unterwegs ist? Gib eine möglichst genaue Schätzung!
3. Kürze die Wegbeschreibung ab! Vereinfache durch ein Schachbrettmuster als Kartennetz mit Koordinaten wie üblich auf Karten (z.B. ist die Kombination BuchstabeNummer: „C3“)! Was wäre ein sinnvoller Maßstab und ein geeignetes Kartennetz?

Daraufhin will Columbus seinem Bruder erklären wie bisher navigiert wurde und wie er es vorhat nach Ostindien zu navigieren:

„Bartolome, wenn wir im Thyrrenischen Meer zur Straße des Bonifacio an Sardinien in Richtung Korsika entlangsegeln, dann wissen wir sicher ohne große navigatorische Kunst, wo wir uns befinden. Wollen wir dann aber durch die Straße des Bonifacio zwischen Sardinien und Korsika hindurchsegeln, müssen wir einen neuen Kurs festlegen. Nachdem das Schiff gerade Richtung Nord läuft, kann man sich ganz einfach die Peilung von zwei Leuchttürmen per Sicht ausrechnen. Dazu muss ich nur den Winkel schätzen, der zwischen meiner Nordrichtung und dem angepeilten Leuchtturm ist. Das ist bei Leuchtturm 1 *Bonifacio* 75° und bei Leuchtturm 2 von *Porto di Olbia* 101° . Und da ich gut in der Segelschule aufgepasst habe, Bartolome, ist der Schnittpunkt der beiden Peilungen zu den Leuchttürmen zweifelsfrei mein Standort! Aufgrund meiner genauen Standortbestimmung kann ich nun den neuen Kurs zwischen den Inseln hindurch setzen. Das wären dann 80° . Das war ja jetzt nicht schwer!“



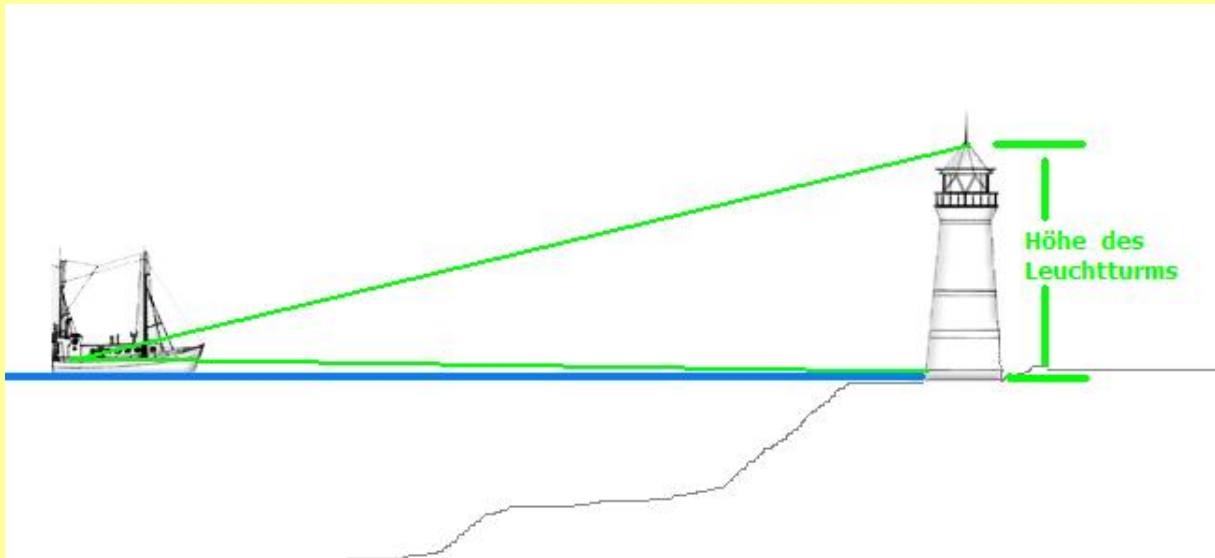
1. Warum reichen Columbus zwei Peilungen zur genauen Standortbestimmung aus?
2. Gestalte eine Frage die Bartolome Columbus stellen könnte, was er an seiner Erklärung nicht verstanden hat! Verbessere Columbus danach!

Columbus:

„Schwieriger wird es aber wenn ich nun meine Entfernung zu den Küsten der Insel berechnen möchte. Sicher könnte ich als erfahrener Seemann die Entfernung schätzen, aber ich will das Ganze lieber sicher berechnen. Der Winkel unter dem wir die Höhe einer Landmarke, also einem Leuchtturm zum Beispiel, sehen, wird umso größer, je näher wir dem Turm sind. Da du ja Kartograf bist weißt du selbst, dass in Karten in der Regel die Höhe solcher Landmarken eingetragen ist! Was wir für ein Instrument zur Winkelberechnung verwenden, erzähle ich dir gleich!“

?

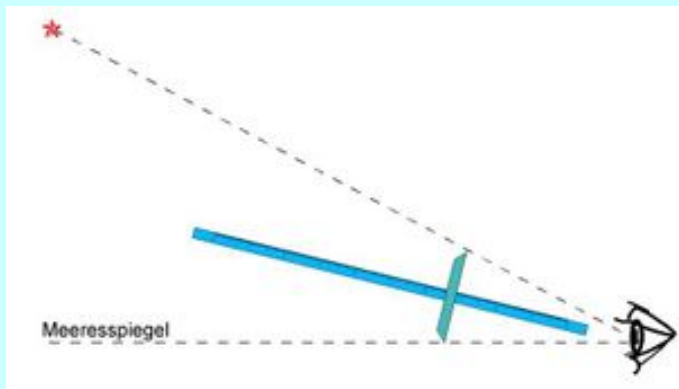
1. Wie weit ist das Schiff von der Küste entfernt wenn der Turm nach Karte 75 m hoch ist und der gemessene Winkel auf Augenhöhe 3° beträgt? Schreibe dir zuerst eine Schätzung auf und berechne danach mit Hilfe der Skizze.



Columbus erklärt nun, dass zur Winkelmessung eines zu seiner Zeit revolutionäres Instrument verwendet wird: Der Jakobsstab.



Der *Jakobsstab* wurde vornehmlich zur Bestimmung der geographischen Breite genutzt. Dazu wurde der Höhenwinkel der Sonne oder eines durch seine große Entfernung in gleicher Richtung/Position stehenden Fixsternes (meist des Polarsterns) über dem Meeresspiegel-Horizont gemessen. Bei der küstennahen Navigation wurden mit ihm auch Winkel zwischen Zielen am Boden gemessen und damit in der Karte die Position bestimmt.



Der Stab besteht aus einem Basisstab mit Ablese skala und einem kleinen Querholz. Man verwendet ihn, indem man den Basisstab unter dem Auge ansetzt und anschließend das Querstück so lange verschiebt, bis dessen Enden den Horizont und den angepeilten Stern gerade so überdecken. Die halbe Länge des Querstabes, dividiert durch die am Basisstab abgelesene Länge (Abstand vom Auge zum Querstab), ergibt den Tangens des halben gesuchten Winkels zwischen Horizont und Stern. Die Skalierung des Querholzes war häufig so ausgeführt, dass für eine bestimmte Querholzlänge der Winkel direkt abgelesen werden konnte.

Zur Entfernungsmessung wird der Winkel α einer Basis mit bekannter Länge gemessen. Dazu eignet sich zum Beispiel ein Leuchtturm bekannter Höhe b . Der Abstand s zum Leuchtturm ergibt sich für große Entfernungen, bei senkrechtem Querstab auch aus

$$s = \frac{b}{2} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$

Jedoch ist die Anwendung schwierig, da während des Verschiebens des Querholzes über die Skala gleichzeitig die beiden Peilungen aufrecht erhalten werden müssen, was besonders auf einem schwankenden Schiff kaum mit der gewollten Genauigkeit durchzuführen ist.

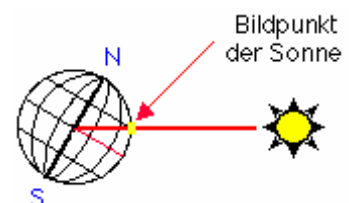
Der Jakobsstab war in der Seefahrt der Vorläufer des Sextanten, der später im 18. Jahrhundert von Newton entwickelt wurde.



1. Notiere 4 Fragen zum Text über den Jakobstab. Beantworte davon 2.
2. Formuliere eine Gleichung für die erklärte Winkelberechnung von Fixsternen. Verwende ein Beispiel!
3. Informiere dich über die Verwendung von Fixsternen in der Navigation. Warum verändert sich ihre Position nicht?
4. Erkläre, wie Columbus mit dem Jakobstab einen Breitengrad berechnen kann.

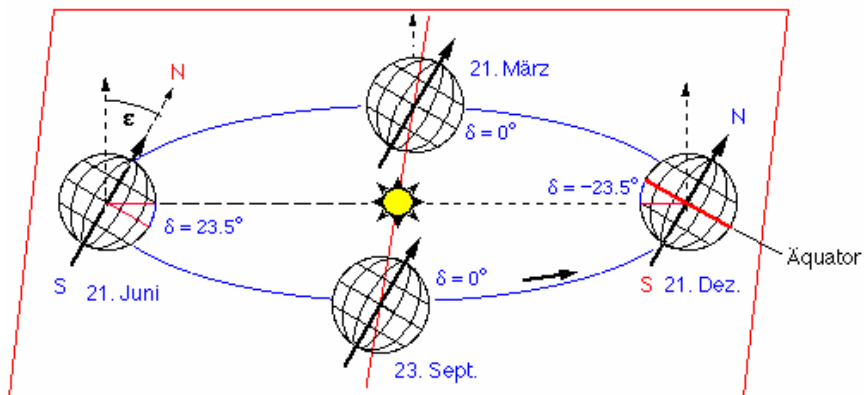
Bartolome staunt über das Wissen seines Bruders und hört gebannt zu als dieser nun die Navigation auf hoher See erklärt. Der Jakobstab ist eines der Instrumente, das auf hoher See nötig ist, nämlich zur Breitengrad-Bestimmung.

Wir nehmen keine Peilung an Landmarken. Die gibt es nämlich nicht mehr. Also muss unser Leuchtturm durch andere Marken ersetzt werden. Dabei gibt es nur eine Möglichkeit: ein Blick in den Himmel. Denn ob Tag oder Nacht die Sonne, der Mond und die Sterne begleiten uns stets und sind auf offenem Meer unsere Leuchttürme – aber mit einer nahezu unendlichen Höhe und immer in Bewegung! Aber wo die Sonne auch immer steht,



an einem Punkt der Erde steht sie senkrecht auf die Erde, also im Zenit. Mit ihrer Hilfe kann man die zweite Position bestimmen: den Längengrad. Fällt man nun ein Lot, trifft es die Erde am so genannten *Bildpunkt der Sonne*, es ist der Fußpunkt unseres „Sonnenleuchtturms“. Problem dabei ist jedoch, dass wir einen Himmelskörper anpeilen, keinen feststehenden Leuchtturm. Somit gilt unsere Peilung nur zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt. Dazu sind sehr genaue Uhren notwendig, die es gerade zu Columbus' Zeit noch nicht gab – siehe Infokasten. Zu allem Überflus bewegt sich die Sonne nicht genau gleichförmig. Durch die

Sonnenbewegung kann also nur eine Schätzung eines Längengrades erfolgen, da die Sonne in einer Stunde 15 Längengrade überquert. Mit Hilfe der genauen Zeit und den so genannten Nautischen Jahrbüchern kann so genau der Fußpunkt unseres „Sonnenleuchtturmes“ bestimmt werden.



1. Überlege dir wie viele Kilometer die Sonne in einer Stunde überquert. In Seemeilen umgerechnet sind das?
2. Wie verändert sich der Sonnenstand wenn du von Hamburg nach Rom fährst?
3. Welche Unterschiede oder Vor-/Nachteile hat der Sextant im Vergleich zum Jakobstab?
4. Andere Instrumente wie der Kompass sollten die Seefahrt weiter vereinfachen. Zeigt eigentlich ein Kompass immer Richtung Norden? Erkläre wann und wann dies nicht der Fall ist!



Es dauerte einige Jahrhunderte, bis die Seefahrer die geographische Länge bestimmen konnten. Sie beruhte auf einer Zeitmessung. Wenn man die Ortszeit an Bord des Schiffes und gleichzeitig die eines Ortes bekannter Länge hatte, konnte der Seefahrer den Zeitunterschied in den geographischen Abstand umrechnen. Leider war in früheren Zeiten der Längengrad 0 nicht festgelegt. Frühere portugiesische Kartographen wählten dazu die Azoren oder Kanarischen Inseln dafür. Für die Dänen war es Kopenhagen, die Franzosen Paris, die Engländer London, für die Chinesen Peking und die Preußen Berlin. Erst 1884 legte man sich auf den gemeinsamen Längengrad 0 von Greenwich fest.

Das große Problem war dennoch, dass es keinen genauen Zeitmesser gab. Erst der Erfinder John Harrison erstellte als gelernter Zimmermann aus England die ersten seetüchtigen Uhren mit ausreichender Ganggenauigkeit.