Lösungsvorschlag

Auf der Webseite werden zwei sehr komplexe Aufgaben gestellt. In der ersten Aufgabe soll der Wert der jährlichen Zahlungen aus einem <u>Sparvertrag</u> berechnet werden, in der zweiten Aufgabe der Wert der garantierten, jährlichen Zahlungen aus einer <u>privaten Altersrente</u>, einer sogenannten „*aufgeschobenen Leibrente auf Lebenszeit*“. Die Kapitalsumme einer solchen privaten Rentenversicherung besteht aus einem garantierten Teil, der mit einem festen Rechnungszins kalkuliert ist und einer Gewinnbeteiligung, die allerdings nicht garantiert ist.

Im Rahmen dieses Projekts soll der garantierte Teil berechnet werden. Bei einer abschließenden Entscheidung für oder gegen die private Rentenversicherung kann jedoch die Gewinnbeteiligung berücksichtigt werden. Hierfür lassen sich jedoch keine sicheren Aussagen treffen.

Die sehr ähnliche Aufgabenstellung deutet schon an, dass die beiden Aufgaben viel gemeinsam haben werden. Tatsächlich bildet die erste Aufgabe eine direkte Grundlage für die zweite Aufgabe.

→ Beginnen wir mit dem *Sparplan* **<u>(Aufgabe 1)</u>**:

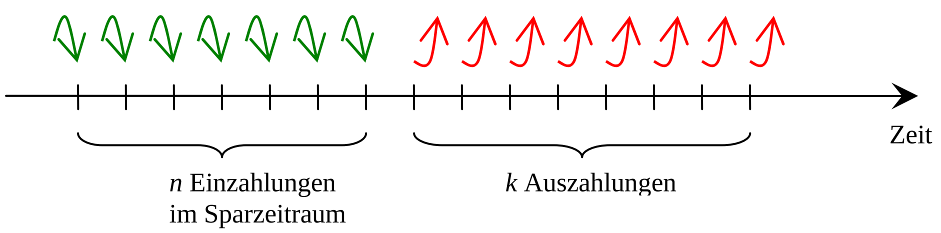
Genau wie bei der Berechnung für die *private Altersrente* in der zweiten Aufgabe gibt es zwei Zahlungsströme:

1. Sparzeitraum
2. Auszahlungszeitraum

Beide Zahlungsströme sind aus mathematischer Sicht *Renten*, denn es handelt sich um eine Folge von konstanten Zahlungen in festen Zeitabständen.

Im ersten Fall um Zahlungen <u>auf</u> ein Konto mit Zinseszins.
Im zweiten Fall um Zahlungen <u>von</u> einem Konto mit Zinseszins.

Darstellung der beiden Zahlungsströme über die gesamte Laufzeit des Sparvertrags

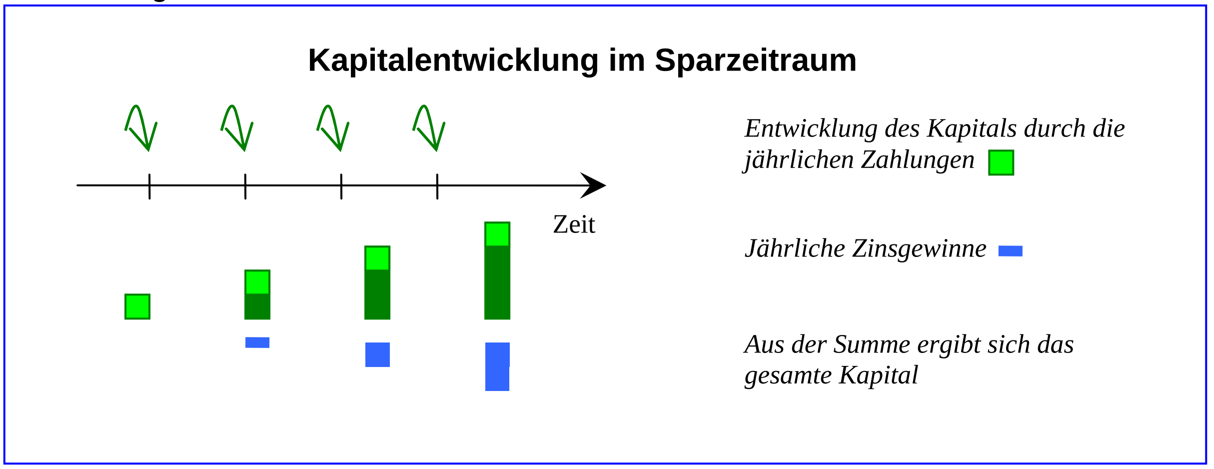


Dabei gilt, dass der *Rentenendwert* (die Summe aller Einzahlungen mit Zinseszins) des <u>Sparzeitraumes</u> gleich dem *Rentenbarwert* (Summe der abgezinsten Auszahlungen) des Auszahlungszeitraums ist.

Wenn wir den Rentenendwert des 1. Zeitraum mit S_n und den Rentenbarwert des 2. Zeitraums mit R_0 bezeichnen, gilt nach dem Äquivalenzprinzip:

$$S_n = R_0$$

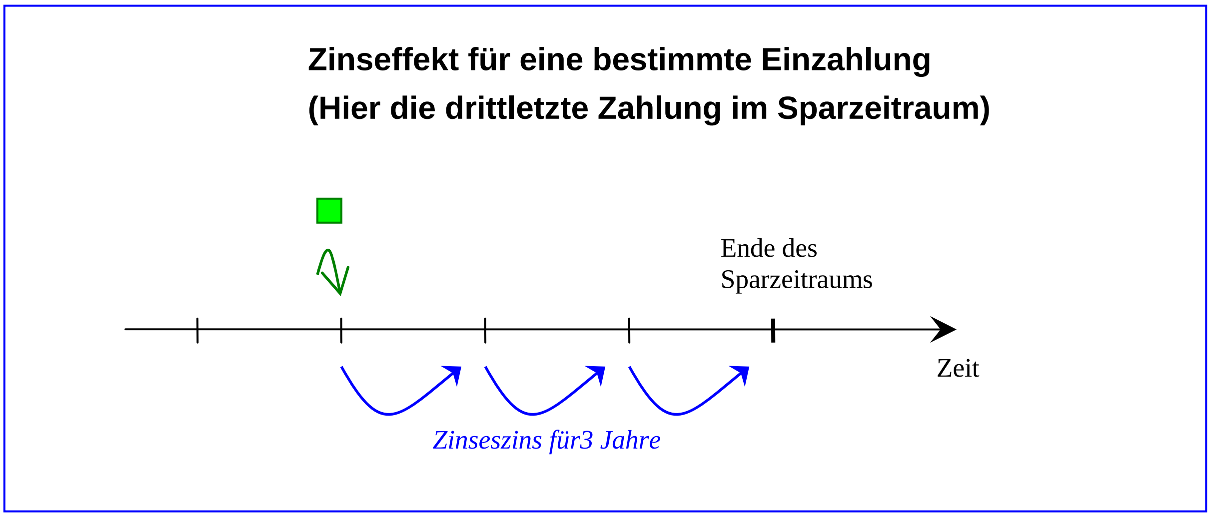
Denn das Kapital aus dem Sparzeitraum stellt ja die Grundlage zur Berechnung der Auszahlungen dar.



Sei nun der Sparzeitraum n Jahre, so dass es n Zahlungen gibt und p der Zinssatz, so dass sich durch $1+p=q$ der Aufzinsungsfaktor ergibt sowie Z der jährliche Sparbetrag ist, gilt:

$$S_n = Z_1 \cdot q^1 + Z_2 \cdot q^2 + \ldots + Z_{n-1} \cdot q^{n-1} \tag{1}$$

Hier ist der Index so zu verstehen, dass Z_1 die letzte Zahlung im Sparzeitraum ist, so dass es für diese Zahlung noch einmal Zinsen gibt. Auf die vorletzte Zahlung Z_2 gibt es Zinsen für zwei Jahre usw.



Betrachtet man nun den Auszahlungszeitraum, dieser umfasse k Jahre. Er beginnt im Jahr n nach Vertragsabschluss und endet mit der letzten Auszahlung im Jahr $n+k$ nach Vertragsabschluss. Es gibt es also $k+1$ jährliche Auszahlungen J in konstanter Höhe, so ist die Summe dieser Auszahlungen der *Rentenendwert* des Auszahlungszeitraums und es gilt:

$$J_0 + J_1 + \ldots + J_k = R_k > R_0 = S_n$$

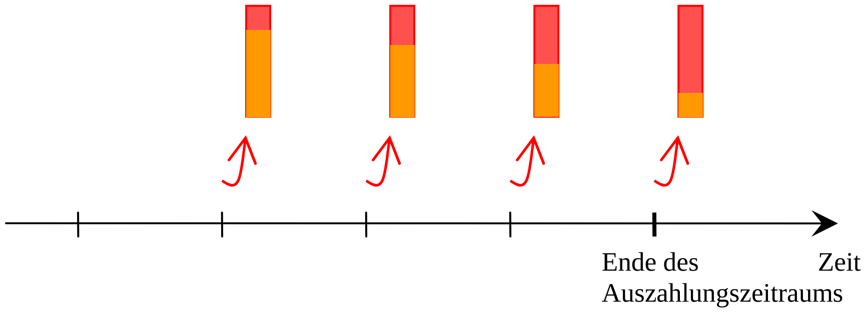
Denn auch im Auszahlungszeitraum gibt es Zinsen auf das Restkapital. In jedem J_i gibt es nun einen Anteil A aus dem Kapital S_n am Ende des Sparzeitraums und Zinsen. Für die erste jährliche Auszahlung J_0 gibt es keine Zinsen, für die zweite Auszahlung gibt es Zinsen für ein Jahr usw. so dass gilt:

$$J_i = A_i \cdot q^i \qquad (2)$$

Nun war A_i als Anteil aus S_n gewählt, dass gilt:

$$R_0 = S_n = A_0 + A_1 + \ldots + A_k \qquad (3)$$

Rentenendwert und Rentenbarwert im Auszahlungszeitraum



Der *Rentenendwert* R_k ergibt sich aus der Summe aller jährlichen Zahlungen J.
Jede einzelne Zahlung J setzt sich zusammen aus dem Anteil A aus dem Kapital am Ende des Sparzeitraums und dem Zinsgewinn dieses Anteils für den Zeitraum vom Anfang des Auszahlungszeitraums, bis zur Auszahlung.

Somit ist der *Rentenbarwert* zum Beginn des Auszahlungszeitraums die Summe aller Anteil A.

Stellt man nun Gleichung (2) nach A_i um und setzt dies in (3) ein gilt:

$$S_n = \tfrac{J_0}{q^0} + \tfrac{J_1}{q^1} + \ldots + \tfrac{J_k}{q^k}$$

Da J konstant sein soll gilt weiter:

$$\begin{aligned} S_n &= \tfrac{J}{q^0} + \tfrac{J}{q^1} + \ldots + \tfrac{J}{q^k} \\ &= J \cdot \left(\tfrac{1}{q^0} + \tfrac{1}{q^1} + \ldots + \tfrac{1}{q^k}\right) \\ &= J \cdot \left(1 + \tfrac{1}{q^1} + \ldots + \tfrac{1}{q^k}\right) \end{aligned} \qquad (4)$$

Womit sich die Höhe der jährlichen Auszahlungen J aus dem Sparvertrag bestimmen lässt.

$$J = S_n \cdot \left(1 + \tfrac{1}{q^1} + \ldots + \tfrac{1}{q^k}\right)^{-1}$$

→ Und jetzt zur Altersrente **(Aufgabe 2)**

Der wesentliche Unterschied bei dieser Aufgabe liegt in der ungewissen Lebenserwartung der Versicherungsnehmerin Frau Meyer. Es ist unklar, ob sie alle Prämienzahlungen im ersten Zeitraum erbringen kann, ob sie überhaupt Leistungen empfangen wird und wenn sie das Alter zum Empfangen der Leistungen erreicht, wie viele Rentenzahlungen dann erfolgen.

Dieses Dilemma wird durch die mittlere Lebenserwartung und den entsprechenden Überlebenswahrscheinlichkeiten behoben. Da es ja keine sicheren, sondern nur zu erwartende Kapitalbeträge gibt, spricht man von

1. Summe der erwarteten Leistungen (L)
2. Summe der erwarteten Prämienzahlungen (P_n)

Wobei auch hier wieder P_n der Rentenendwert der Prämienzahlungen ist und P_0 der Rentenbarwert der Prämienzahlung, als der abgezinste Rentenendwert.

Auch hier gilt das Äquivalenzprinzip, so dass $L = P_0$ erfüllt sein muss.

Nimmt man die erste Aufgabe als Grundlage, gilt $L = S_n$ und $P_0 = R_0$, wenn man für die zweite Aufgabe zunächst ein Modell annimmt, in dem die Überlebenswahrscheinlichkeiten noch nicht berücksichtigt sind. Das heißt nun, dass jetzt nur noch die Gleichungen (1) und (4) angepasst werden müssen.
Dazu muss für die Gleichung (1) jede Zahlung mit ihren jeweiligen Zinsen mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert werden, dass diese Zahlung als Prämie überhaupt erfolgt. Diese geschieht mit der *Überlebenswahrscheinlichkeit, dass die zum Versicherungsabschluss y Jahre alte Person i Jahre bis zur Fälligkeit der Prämie überlebe*. Diese Wahrscheinlichkeit wird mit dem Symbol ${}_y q_i$ bezeichnet. (Wie ${}_y q_i$ aus der Sterbetafel bestimmt wird, wird weiter unten bei (7) und (8) geklärt.)

Somit erhält man:

$$L = Z_1 \cdot q^1 \cdot {}_y p_1 + Z_2 \cdot q^2 \cdot {}_y p_2 + \ldots + Z_{n-1} \cdot q^{n-1} \cdot {}_y p_{(n-1)} \qquad (5)$$

Genau das gleiche muss mit der Gleichung (4) gemacht werden, so dass jede abgezinste Auszahlung einer Leistung mit ihrer Wahrscheinlichkeit zur Auszahlung, eben wieder ${}_y q_i$ multipliziert wird.

Wichtig ist hier der Zeitraum! Durch die Sterbetafel wird ein *Höchstalter* A gegeben. Ist nun *k* die Differenz aus Höchstalter und dem Alter im dem die erste Leistung in Anspruch genommen wird, dann erfolgen (k+1) Auszahlung, wenn die letzte Zahlung beim Erreichen des Höchstalters getätigt wird:

$$\begin{aligned} R_0 &= \tfrac{J}{q^0} \cdot {}_y p_{A-(k+0)} + \tfrac{J}{q^1} \cdot {}_y p_{A-(k+1)} + \ldots + \tfrac{J}{q^{k-1}} \cdot {}_y p_{A-1} + \tfrac{J}{q^k} \cdot {}_y p_A \\ &= J \cdot \left(\tfrac{1}{q^0} \cdot {}_y p_{A-(k+0)} + \tfrac{1}{q^1} \cdot {}_y p_{A-(k+1)} + \ldots + \tfrac{1}{q^{k-1}} \cdot {}_y p_{A-1} + \tfrac{1}{q^k} \cdot {}_y p_A \right) \\ &= J \cdot \left(1 \cdot {}_y p_{A-(k+0)} + \tfrac{1}{q^1} \cdot {}_y p_{A-(k+1)} + \ldots + \tfrac{1}{q^{k-1}} \cdot {}_y p_{A-1} + \tfrac{1}{q^k} \cdot {}_y p_A \right) \end{aligned} \qquad (6)$$

Aus einer höheren mathematischen Sicht passiert in Gleichung (5) nichts anderes als den Erwartungswert für den Rentenendwert des Sparzeitraums zu bestimmen und in Gleichung (6) den Erwartungswert für den Rentenbarwert des Auszahlungszeitraums zu errechnen. Der Erwartungswert ist allerdings Schülern der 9. Klasse nach den aktuellen Lehrplänen für Hessen nicht bekannt.

→ Das Berechnen der Überlebenswahrscheinlichkeiten mit der Sterbetafel.

Die Datei „arbeitsgrundlage_davsterbetafel2004r.xls“ ist eine Exceltabelle, in der die Entwicklung einer Frauenpopulation, die zu Beginn 1.000.000 Individuen umfasst dargestellt wird. Dabei wird der zeitliche Verlauf durch y in Jahren dargestellt, wodurch sich eine Zuordnung der Population im Jahr y durch l_y ergibt.

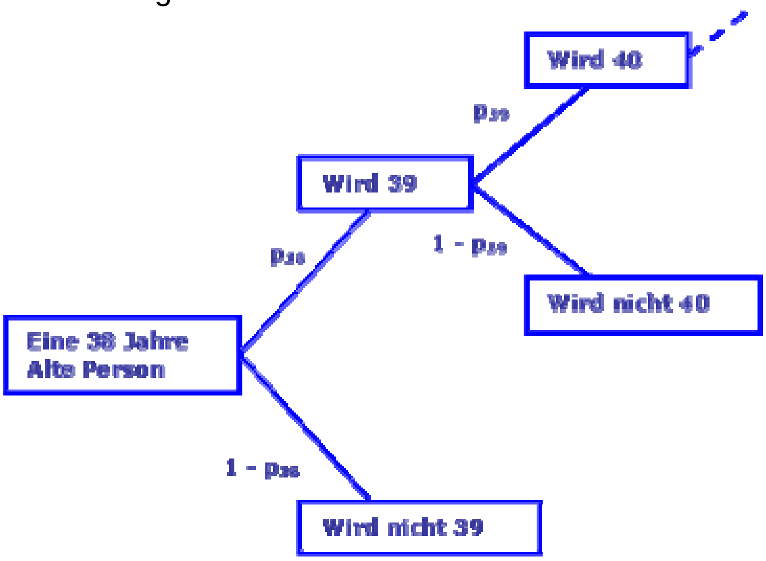
Alle weiteren Werte die zum Lösen der Aufgabe erforderlich sind, sollen nun in Excel berechnet werden.

Zunächst wird die Überlebenswahrscheinlichkeit einer y Jahre alten Person für ein Jahr benötigt. Diesen Wert wird mit p_y bezeichnet und ergibt sich durch:

$$p_y = \frac{l_{y+1}}{l_y} \tag{7}$$

Da die Größe der Population im folgenden Jahr l_{y+1} die Zahl der günstigen Fälle darstellt und die Größe der Population im aktuellen Jahr l_y der Anzahl der möglichen Fälle entspricht.

Die für die Aufgabe erforderliche Überlebenswahrscheinlichkeit einer y Jahre alten Person für weitere i Jahre (${}_y q_i$), die in den Gleichungen (5) und (6) verwendet werden, ergibt sich unmittelbar aus den p_y. Die erforderliche Berechnung lässt sich durch ein Baumdiagramm veranschaulichen. Exemplarisch sei hier der Baum für eine 38 Jahre alte Person dargestellt:



Der Wert für ${}_y q_i$ ergibt sich also aus der Multiplikation der p_y entlang des Pfades, dass die Person immer älter wird und somit erhält man:

$${}_y q_i = \prod_{j=y}^{y+(i-1)} p_j \tag{8}$$

→ Konkrete Hinweise zu den Aufgaben:

Beide Rechnungen (die Berechnung von p_y und $_y q_i$) wurden in der Excel-Datei „loesung_davsterbetafel2004r.xls“ ausgeführt.

Die Berechnungen zu den Aufgaben sind in den Tabellen „loesung_sparplan.xls“ und „losungen_rente.xls“ durchgeführt.

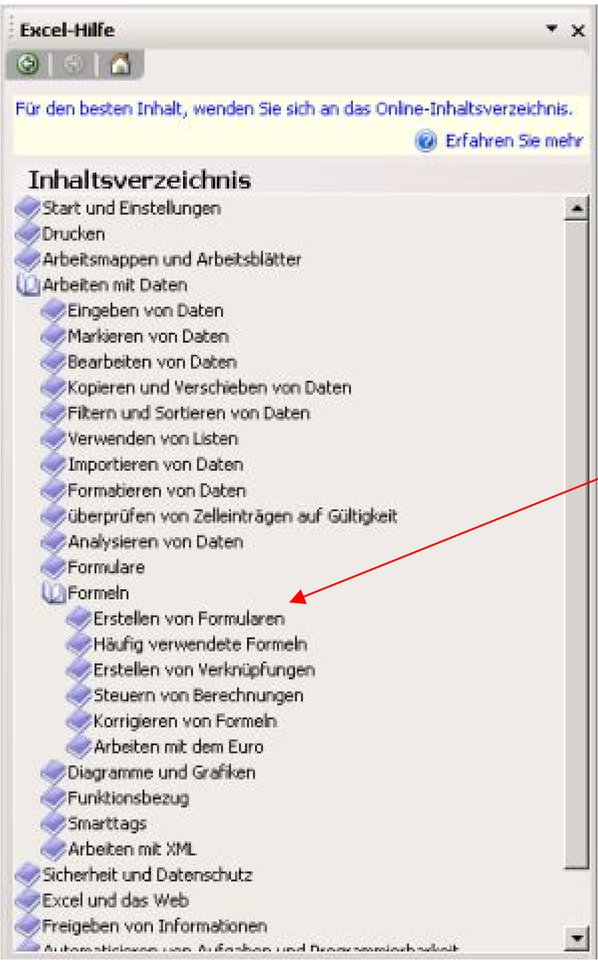
Alle Excel-Tabellen sind in der Zip-Datei „loesungen.zip“ enthalten.

→ Zum Arbeiten mit Excel

Die vielen Berechnungen der Faktoren für Zinsen und Überlebenswahrscheinlichkeit wären von Hand viel zu mühsam und fehleranfällig. Excel bietet eine gute Möglichkeit diese Berechnungen durchführen zu lassen.

Bei Fragen zum Umgang mit Excel hilft vielleicht die Excel-Hilfe weiter. Starten der Hilfe durch „F1“, dann klicken auf Inhaltsverzeichnis. Hier gibt es eine Überblick über sämtliche Hilfethemen. (Die „Stichwortsuche“ nach Hilfethemen hat sich bei mir persönlich nicht bewährt!)

Hilfe zu Formeln gibt es dann unter
Arbeiten mit Daten → Formeln



Für Anfänger im Umgang mir Formeln in Excel sind möglicherweise die Punkte „Erstellen einer Formel“ und „Verschieben oder Kopieren einer Formel“ unter dem Punkt „Erstellen von Formularen“ hilfreich.